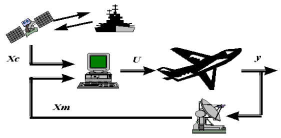


Figures du chapitre 4 : filtrage analogique .

1) Fonction du filtre et famille de filtres.

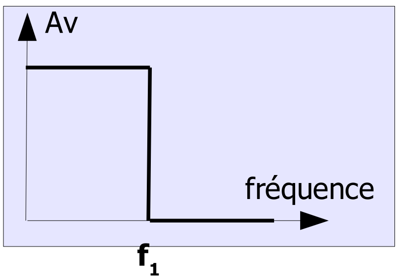
Un filtre analogique : c'est un dispositif linéaire dont le comportement dépend de la fréquence.

Paramètre qui reste commun à ve(t) et vs(t) : si ve(t) est une sinusoïde de fréquence f_0, vs(t) est également une sinusoïde de même fréquence f_0.

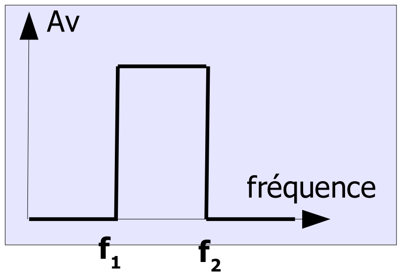
Que veut-on quand on utilise un filtre analogique ?

- ➔ extraire une partie du signal d'entrée ve(t) : ex : le fondamental ou bien la valeur moyenne.
- ➔ éliminer ou affaiblir une partie du signal d'entrée : ex : la partie continue, ou des parasites indésirables.
- ➔ modifier la phase du signal d'entrée sans changer son spectre d'amplitude.
- ➔ isoler dans un ensemble une bande de fréquences utiles ou intéressantes.

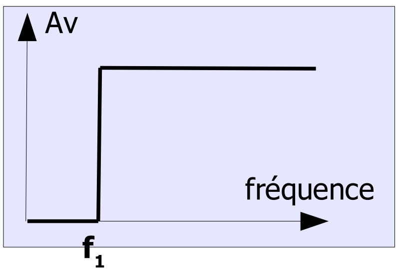
Ceci nous amène à définir quatre types de filtres parfaits, avec les gabarits suivants :



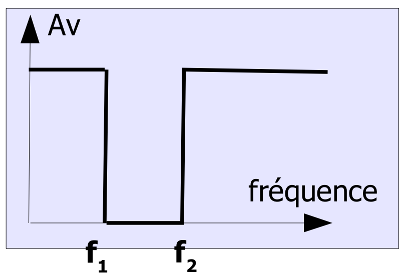
Passe bas de fréquence de coupure f_1.



Passe-bande de fréquences de coupures f_1 et f_2 ou de bande passante B = (f_2-f_1)



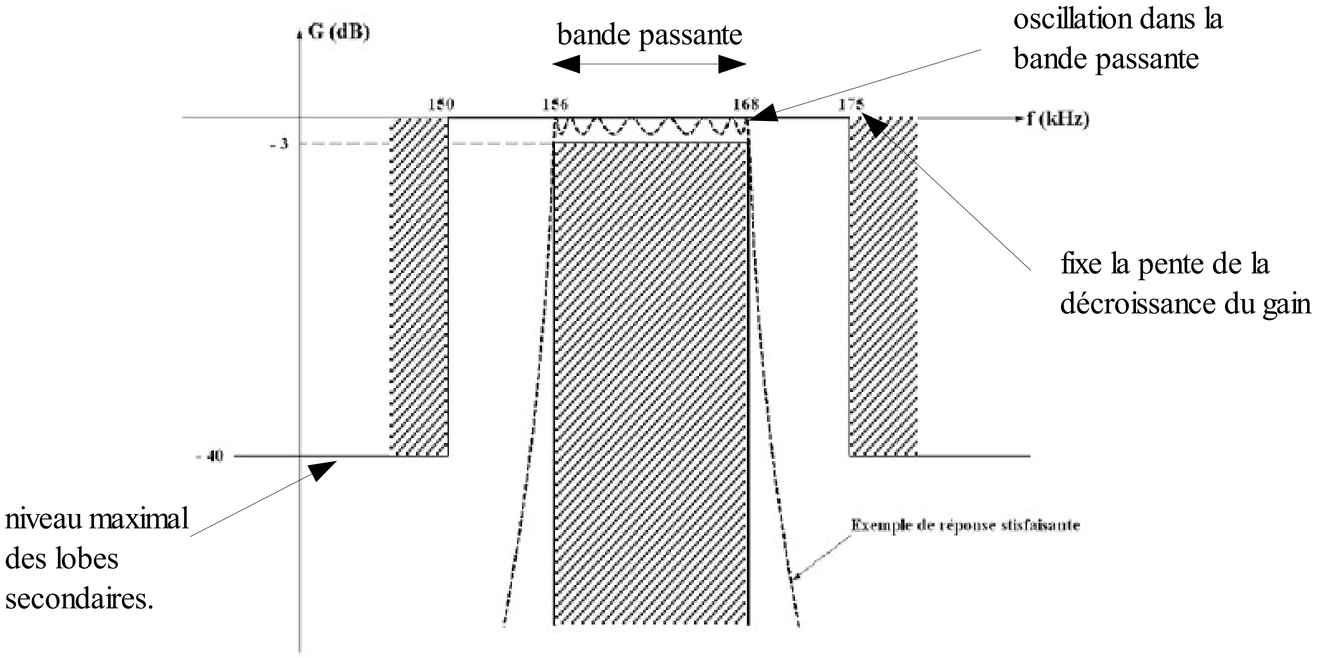
Passe haut de fréquence de coupure f_1.



Coupe bande (bande coupée entre f_1 et f_2)

$Av(f) = \frac{\hat{vs}}{\hat{ve}}$ est l'amplification en tension du filtre pour la fréquence f correspondante.

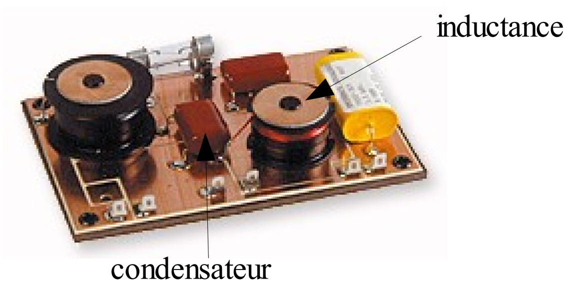
En fait, on sait bien que de tels filtres sont irréalisables pratiquement (front raide dans la décroissance). On sera amené à définir des gabarits de filtres réels :



On trouve des filtres qui s'appliquent à des signaux de type analogiques et des filtres qui agissent sur des signaux numériques (manipulation de chiffres représentant le signal analogique, issus de l'échantillonnage et de la conversion analogique/numérique).

Dans la famille des les filtres analogiques, on trouve trois sous-ensembles :

- ➔ filtres passifs.
- ➔ filtres actifs.
- ➔ filtres à capacités commutées.



exemple de filtre passif trois voies pour enceinte acoustique.

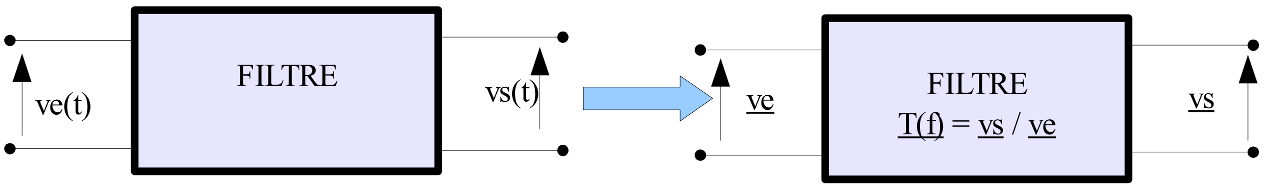
filtre passif à onde de surface de fréquence centrale jusqu'à 200 GHz (Tchebycheff, Bessel et Butterworth) A quartz, céramiques, hélicoïdaux LC.

Comparatif des différentes familles de filtres :

Type	Composants	Spécificités
Filtres passifs	composants discrets L,C et piézo-électriques	fréquence élevée énergie élevée pas d'alimentation non intégrables
Filtres actifs standards	ampli. opérationnels composants R,C discrets ou intégrés	fréquence < à quelques MHz besoin d'alimentation tension de sortie faible < à 15V intégrables
Filtres à capacités commutées	ampli. opérationnels composants R,C intégrés interrupteurs MOS	fréquence ‹ à quelques MHz besoin d'alimentation tension de sortie faible < à 5V intégrables fréquence programmable
Filtres numériques	circuits logiques intégrés	signaux numérisés fréquence < à 100 MHz énergie faible idéaux pour de grandes séries

http://www.louis-armand-mulhouse.eu/btsse/acrobat-modules/filana.pdf

2) **Rappels sur la fonction de transfert d'un filtre et sa représentation fréquentielle.**



$\underline{T} = (\underline{vs} / \underline{ve})$ est la fonction de transfert complexe du filtre. Elle contient toutes les infos pour trouver la tension de sortie à partir de la tension d'entrée :

$$\text{Si } ve(t) = \hat{Ve} \,.\, \sin(\omega.t) \text{ alors } vs(t) = |\underline{T}| \,.\, \hat{Ve} \,.\, \sin(\omega.t + \arg(\underline{T}))$$

$$|\underline{T}| = \frac{\hat{Vs}}{\hat{Ve}} = \frac{Vs}{Ve} \text{ : amplification.}$$

$\arg(\underline{T})$: déphasage entre vs(t) et ve(t).

Les deux courbes qui caractérisent complètement le filtre sont appelées le diagramme de BODE :

- ➔ courbe de gain : $G(f) = 20.\log(|\underline{T}|)$ en fonction de log(f).
- ➔ courbe de phase : $\varphi(f) = \arg(\underline{T})$ en fonction de log(f).

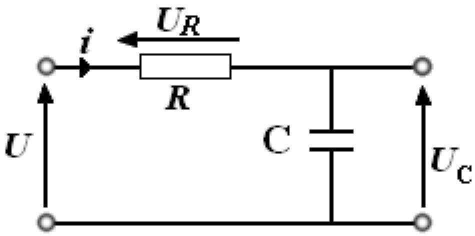
On passe de G (gain) à T (amplification) en appliquant la formule : $\boxed{T = 10^{\frac{G}{20}}}$

- comment trouver la fonction de transfert complexe : $\underline{T} = (\frac{\underline{vs}}{\underline{ve}})$?

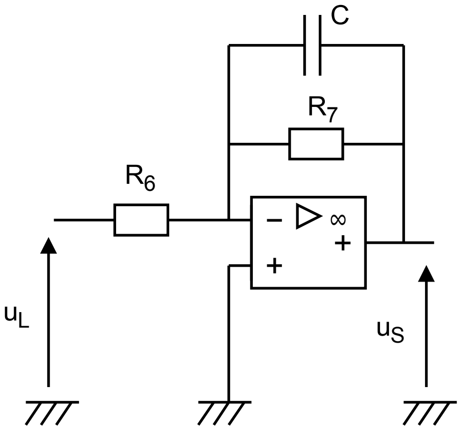
➔ remplacer le schéma électrique réel par un schéma en complexe : toutes les grandeurs temporelles sont remplacées par leur complexe associé et les composants par leur impédances complexes.

➔ utiliser les théorèmes démontrés pour les résistances, en particulier le diviseur de tension et Millman.

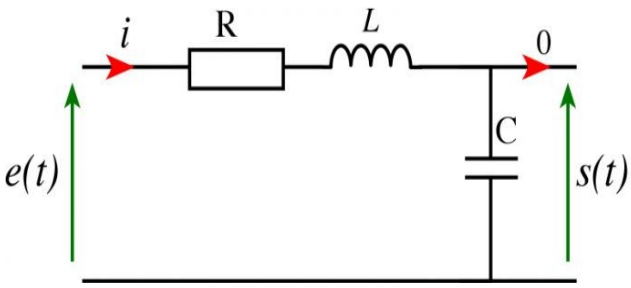
exemples :



t



filtre



comment tracer le diagramme de Bode : ?

➔ on commence par obtenir la fonction de transfert complexe $\underline{T} = (\frac{\underline{vs}}{\underline{ve}})$

➔ on décompose cette fonction de transfert de manière à ce qu'elle soit la plus facile à utiliser possible, c'est-à-dire qu'on va la mettre sous une forme connue : $\underline{T} = (\frac{\underline{N}}{\underline{D}})$ avec N et D sous la forme de polynôme de la variable ω (ou bien f) du premier ou du second ordre.

Possibilités pour N ou D :

T_0 (constante réelle), $j\cdot\frac{\omega}{\omega_0}$ (imaginaire pur), $(1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_0})$ pour le premier ordre, $(1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_1})X(1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_2})$ pour le second ordre qui a deux racines et $(1+2.j.m.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2)$ pour le second ordre n'ayant pas deux racines. ω_0, ω_1, ω_2 et m sont des constantes qui dépendent des composants du montage.

exemple : $\underline{T} = \frac{1}{1+j.R.C.\omega}$ peut être écrit : $\underline{T} = \frac{H_0}{1+j.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$ où H_0 = 1 et ω_0 = (1/RC)

➔ on exprime le module et l'argument de $\underline{T}$, puis le gain en fonction de f, en utilisant les propriétés de la fonction log :

- log(A.B) = log(A) + log(B)
- log(A/B) = log(A) – log(B)
- log(Ax) = x . log(A)

exemple : on a trouvé $\underline{T} = \frac{H_0.j.(\frac{\omega}{\omega_1})}{1+j.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

on écrit alors : $|\underline{T}| = \frac{|H_0|.\left|j.(\frac{\omega}{\omega_1})\right|}{\left|1+j.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right|} = \frac{H_0.(\frac{\omega}{\omega_1})}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ et arg($\underline{T}$) = arg(H_0) + arg($j\cdot\frac{\omega}{\omega_1}$) - arg($1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_0}$)

soit arg($\underline{T}$) = 0 + $\frac{\pi}{2}$ - $\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Pour le gain : G = 20.log($|\underline{T}|$) = 20.log(H_0) + $20.\log(\frac{\omega}{\omega_1})$ - $20.\log(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2})$

- ➔ on cherche la nature du filtre en calculant les limites de $|\underline{T}|$ ou de G lorsque $f \to 0$ et $f \to \infty$.

Avec cette donnée, on trouve à quel endroit rechercher le gain maximal (exemple : pour un filtre passe-bas, le gain maximal se trouve à f = 0). On trouve également T_{max}.

- ➔ on cherche les fréquences de coupure en résolvant l'équation : $|\underline{T}| = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$ ou G = Gmax -3 dB
- ➔ on trace le diagramme de Bode asymptotique : diagramme de Bode simplifié constitué de morceaux de droites et qui correspond à G pour les conditions limites : $f \to 0$ ou $f \to \infty$.

(voir l'annexe : « guide pour tracer un diagramme de Bode »)

- <u>exemple pour un filtre passe_bas du premier ordre</u> : un filtre passe-bas du premier ordre aura toujours une fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{T_0}{1+j.\left(\frac{f}{f_0}\right)}}$$

On a alors : $|\underline{T}| = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$ et $\arg(\underline{T}) = \arg(T_0) - \arg\left(1+j.\left(\frac{f}{f_0}\right)\right) = 0 - \tan^{-1}(f/f_0)$

Le gain et la phase s'expriment alors :

$$G = 20.\log(T_0) - 20.\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = -\tan^{-1}(f/f_0)$$

<u>Limites en 0 et en l'infini :</u>

- si $f \to 0$: $G \approx 20\log.(T_0)=G_0$ (car $1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \approx 1$) et $\varphi = 0$ **G_0 est appelé gain statique.**
- si $f \to \infty$: $G \approx 20\log.(T_0) - 20.\log\left(\frac{f}{f_0}\right)$ (car $1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 \approx \left(\frac{f}{f_0}\right)^2$) et $\varphi \to \frac{-\pi}{2}$

La courbe $G = 20\log.(T_0) - 20.\log\left(\frac{f}{f_0}\right) = 20\log.(T_0)$ **– 20**$.\log(f) + 20.\log(f_0)$

est de la forme G = A.X + B si la variable est X = log(f). Alors A = -20 et $B = 20\log.(T_0) + 20.\log(f_0)$
C'est donc une droite de pente -20.
Si on change f=f1 en f=10.f1, alors G passe d'une valeur G1 à une valeur G1 -20.log(10)=G1 – 20dB

La droite asymptotique est donc de pente -20 dB/décade (lorsqu'on augmente d'une décade, on diminue le gain de 20dB). Elle passe également par le point ($f = f_0$; $G = 20.\log(T_0) = G_0$).

Le filtre est donc un passe-bas car $G = 20.\log(T_0) \neq 0$ lorsque $f \to 0$ et G diminue lorsque f augmente.
Le gain maximal se trouve à f = 0 où $G = 20.\log(T_0)$ = Gmax
De plus, c'est un filtre d'ordre 1 car : f est à la puissance 1 dans $\underline{T}$ ou la pente de la droite asymptotique est de 20 dB/décade.

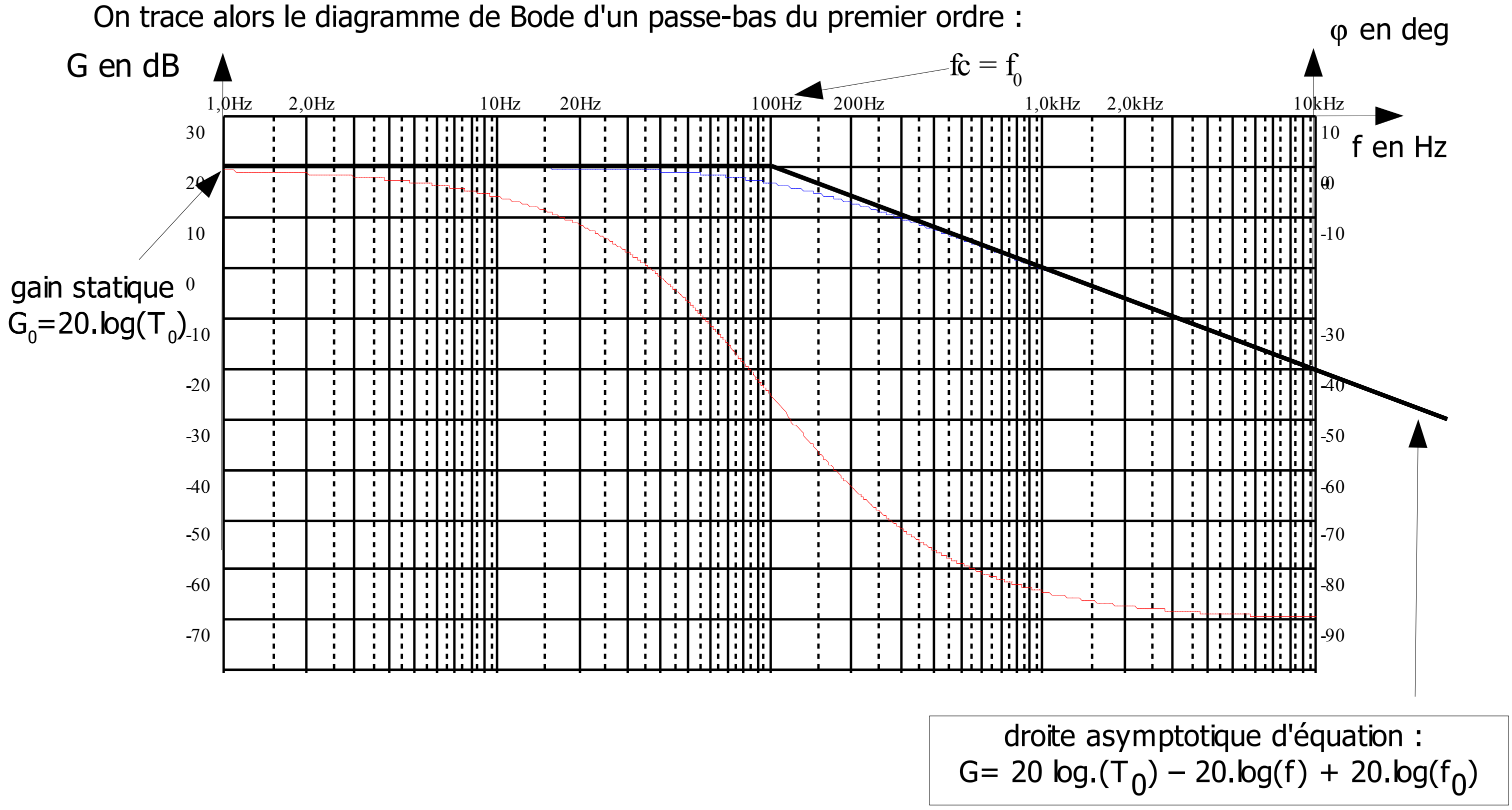
Une valeur particulière : $f = f_0$: pour cette valeur, $G = 20.\log(T_0) - 20.\log(\sqrt{2})$ = Gmax – 3dB
et $\varphi = -\pi / 4$.

Fréquence de coupure : c'est la fréquence pour laquelle G = Gmax – 3 dB ou bien $|\underline{T}| = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}}$

On vient de montrer que pour f = f_0, G = Gmax – 3dB donc la fréquence de coupure est f_0.

Sinon, on le montre en écrivant : $|\underline{T}| = \frac{T_0}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} = \frac{T_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ ici, ce qui donne $(f/f_0) = 1$ soit $f=f_0$.

On trace alors le diagramme de Bode d'un passe-bas du premier ordre :



- exemple pour un filtre passe_bas du second ordre : un filtre passe-bas du second ordre aura toujours une fonction de transfert sous la forme canonique :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1+2.m.j.\left(\frac{f}{f_0}\right)-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

T_0 est l'amplification statique, f_0 la fréquence propre et m le coefficient d'amortissement.
Le filtre est bien d'ordre 2 puisqu'on trouve f au carré dans la fonction $\underline{T}$.

On exprime alors G et φ : $|\underline{T}| = \frac{T_0}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2.m.f}{f_0}\right)^2}}$ avec G = 20.log($|\underline{T}|$)

et $\arg(\underline{T}) = \arg(T_0) - \arg\left(1+2.j.m.\left(\frac{f}{f_0}\right)-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{2.m.\left(\frac{f}{f_0}\right)}{1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\right)$

Limites en 0 et en l'infini :

- si $f \to 0$: $G \approx 20\log.(T_0) = G_0$ et $\varphi = 0$ **G_0 est appelé gain statique.**
- si $f \to \infty$: $G \approx 20\log.(T_0) - 20.\log((\frac{f}{f_0})^2)$ (car $\sqrt{(1-(\frac{f}{f_0})^2)^2 + \left(\frac{2.m.f}{f_0}\right)^2} \approx \left(\frac{f}{f_0}\right)^2$) et $\varphi \to -\pi$

La courbe $G = 20\log.(T_0) - 20.\log((\frac{f}{f_0})^2) = 20\log.(T_0)$ **– 40**$.\log(f) + 40.\log(f_0)$ en fonction de log(f) est une droite de pente -40 dB/décade.

La droite asymptotique est donc de pente -40 dB/décade (lorsqu'on augmente d'une décade, on diminue le gain de 40dB). Elle passe également par le point ($f = f_0$; $G = 20.\log(T_0) = G_0$).

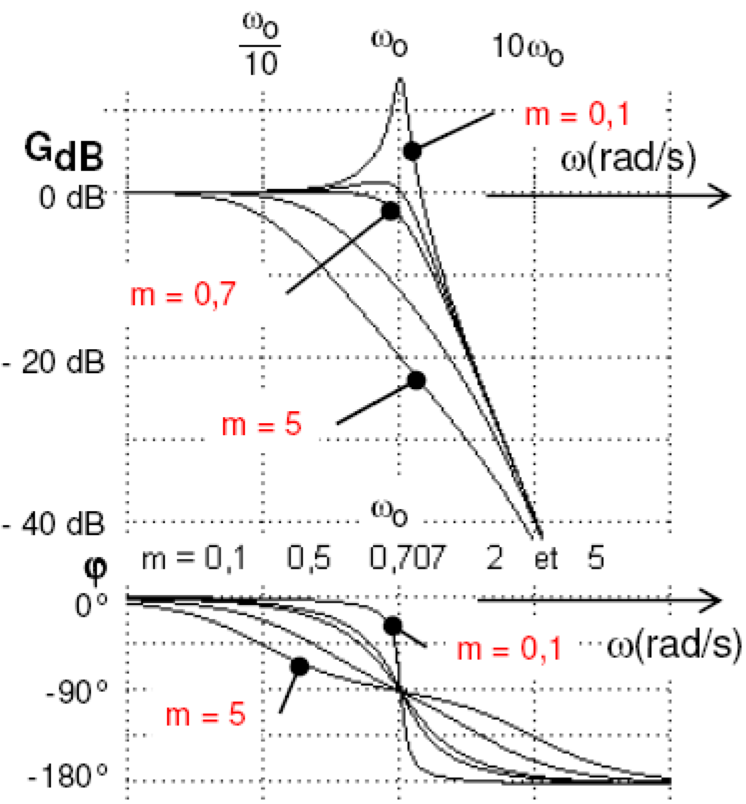
Le filtre est donc un **passe-bas** car $G = 20.\log(T_0) \neq 0$ lorsque $f \to 0$ et G diminue lorsque f augmente.
De plus, c'est un filtre **d'ordre 2** car : f est à la puissance 2 dans $\underline{T}$ ou la pente de la droite asymptotique est de 40 dB/décade.

Une valeur particulière de la courbe réelle : $f = f_0$:

pour cette valeur, $G = 20.\log(T_0) - 20.\log(2.m) = G_0 - 20.\log(2.m)$ et $\varphi = \frac{-\pi}{2}$.

En particulier; si $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $G(f0) = G0 - 20.\log(\sqrt{2}) = G0 - 3$ dB.

Comportement de la courbe de gain et de phase selon la valeur de m :



On a un comportement différent suivant que m est plus grand ou plus petit que 1.
En effet, si on cherche à écrire le dénominateur de $\underline{T}$ sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$(1+2.j.m.(\frac{f}{f_0})-(\frac{f}{f_0})^2) = (1+j.(\frac{f}{f_1}))*(1+j.(\frac{f}{f_2}))$$

on pose alors $\underline{X} = \frac{j.f}{f_0}$, et on doit trouver les racines de : $(1+2.m.\underline{X} + \underline{X}^2)$.
On doit alors calculer le discriminant :
$\Delta = (2.m)^2 - 4.1.1 = 4.(m^2-1)$

Si $\Delta > 0$, c'est à dire si m > 1, on a deux racines réelles : $\underline{X} = m \pm \sqrt{m^2-1}$ soit :

➔ $f_1 = f_0.(m + \sqrt{m^2-1})$

➔ $f_2 = f_0.(m - \sqrt{m^2-1})$

Si $\Delta < 0$, c'est à dire si m < 1, on ne peut plus écrire le dénominateur sous la forme donnée.
Par contre, on montre que si m < 0,7 , la courbe G possède un maximum en :
$f = f_0.\sqrt{(1-2.m^2)}$ qui vaut :
Gmax= $G_0 - 20.\log(2m.\sqrt{1-m^2})$

3) Particularités des filtres passe-bande .

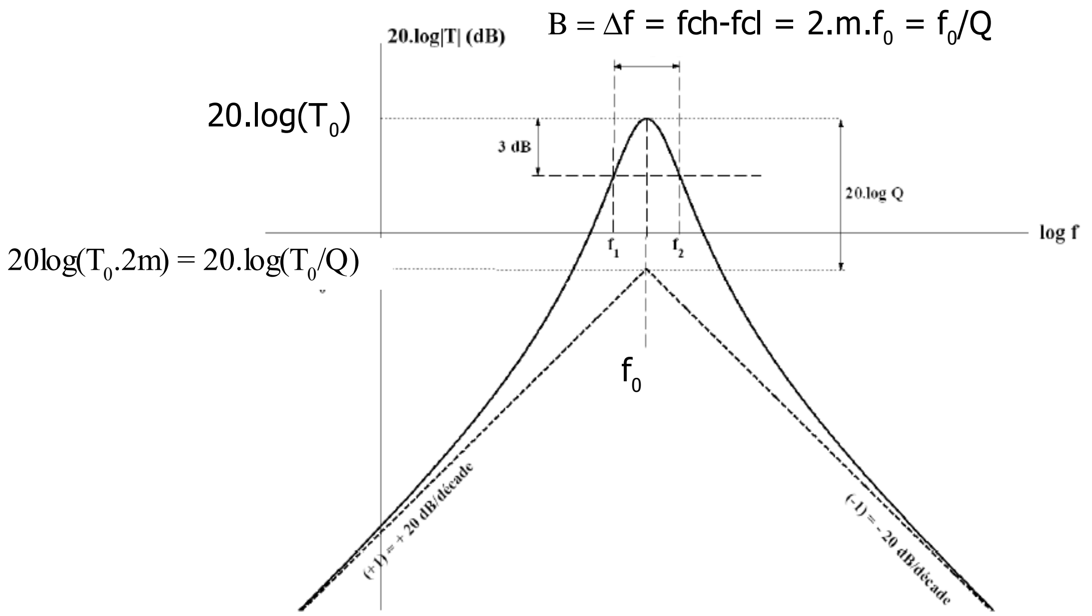
On trouve plusieurs écritures pour la fonction de transfert des filtres passe-bande mais la forme la plus courante est : $\underline{T} = \dfrac{T_0 .2.m.\mathrm{j}.(\frac{f}{f_0})}{(1+2.\mathrm{j}.\mathrm{m}.(\frac{f}{f_0})-(\frac{f}{f_0})^2)}$ que l'on écrit : $\dfrac{T_0}{1+Q.\mathrm{j}.\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)}$ où les termes :

- ➔ f_0 est la pulsation propre.
- ➔ m est le facteur d'amortissement.
- ➔ $Q = \dfrac{1}{2.m}$ est le facteur de qualité.

- En BF, $\underline{T} = \dfrac{T_0}{-\mathrm{j}.Q\left(\frac{f_0}{f}\right)}$: le diagramme asymptotique de gain donne une droite croissante de pente +20 dB/décade et qui passe par f = f_0 et G = 20.log(T_0/Q). La phase vaut +90°.

- En HF, $\underline{T} = \dfrac{T_0}{\mathrm{j}.Q.\left(\frac{f}{f_0}\right)}$: le diagramme asymptotique de gain donne une droite décroissante de pente -20 dB/décade et qui passe par f = f_0 et G = 20.log(T_0/Q). La phase vaut -90°.

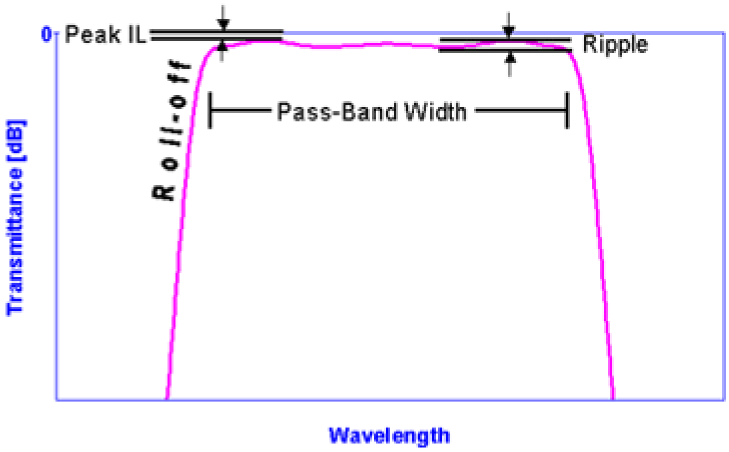
- Pour f =f_0, T = T_0. Le gain maximal est donc : G_0 = 20.log(T_0) et φ = 0 à cette fréquence.



La bande passante est déterminée par m (ou Q) : plus Q est grand (ou m petit), plus le filtre est sélectif.

Lorsque le filtre passe-bande n'est pas sélectif, on parle de filtre large bande.

Un paramètre supplémentaire important (avec le gain maximal dans la bande passante et la valeur de la bande passante) est **l'ondulation** dans la bande passante (ripple en anglais) :



4) Filtres à usage particulier.

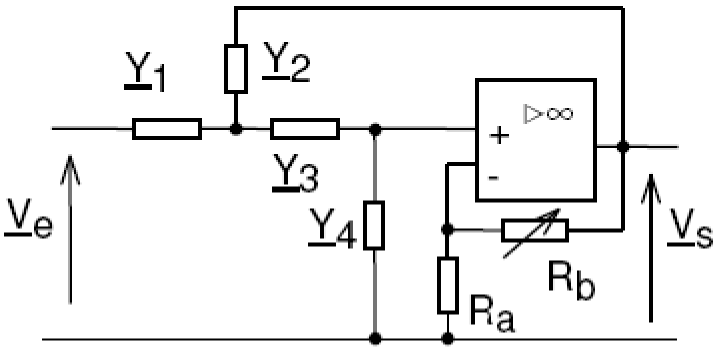
a) Deux structures de filtres actifs couramment utilisées :

- **Structure de Sallen-Key :**

On démontre que :

$$\underline{T} = \frac{K\,\underline{Y_1}\cdot\underline{Y_3}}{(\underline{Y_1}+\underline{Y_2})(\underline{Y_3}+\underline{Y_4}) + \underline{Y_3}\,(\underline{Y_4} - K\,\underline{Y_2})}$$

où $K = 1 + \frac{R_b}{R_a}$

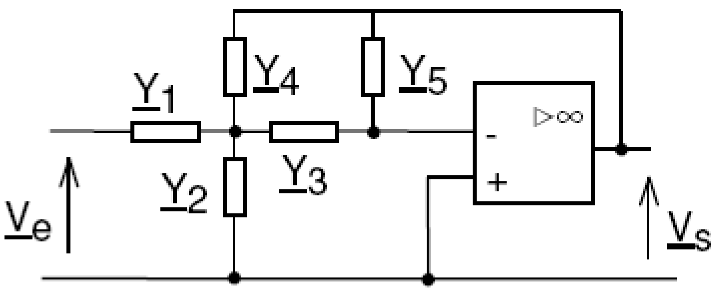


Nature du filtre	nature des composants.
passe-bas	Y1 et Y3 : résistances. Y2 et Y4 : condensateurs.
passe-haut	Y1 et Y3 : condensateurs. Y2 et Y4 : résistances.
passe-bande	Y1 et Y2 : résistances. Y3 : condensateur. Y4 : C et R en parallèle.

- **Structure de Rauch :**

On démontre que :

$$\underline{T} = -\frac{\underline{Y_1}\cdot\underline{Y_3}}{\underline{Y_3}\cdot\underline{Y_4}+\underline{Y_5}\,(\underline{Y_1}+\underline{Y_2}+\underline{Y_3}+\underline{Y_4})}$$



Nature du filtre	nature des composants.
passe-bas	Y1 , Y3 et Y4 : résistances. Y2 et Y5 : condensateurs.
passe-haut	Y1 , Y3 et Y4 : condensateurs. Y2 et Y5 : résistances.
passe-bande	Y1 , Y2 et Y5 : résistances. Y3 et Y4 : condensateurs.

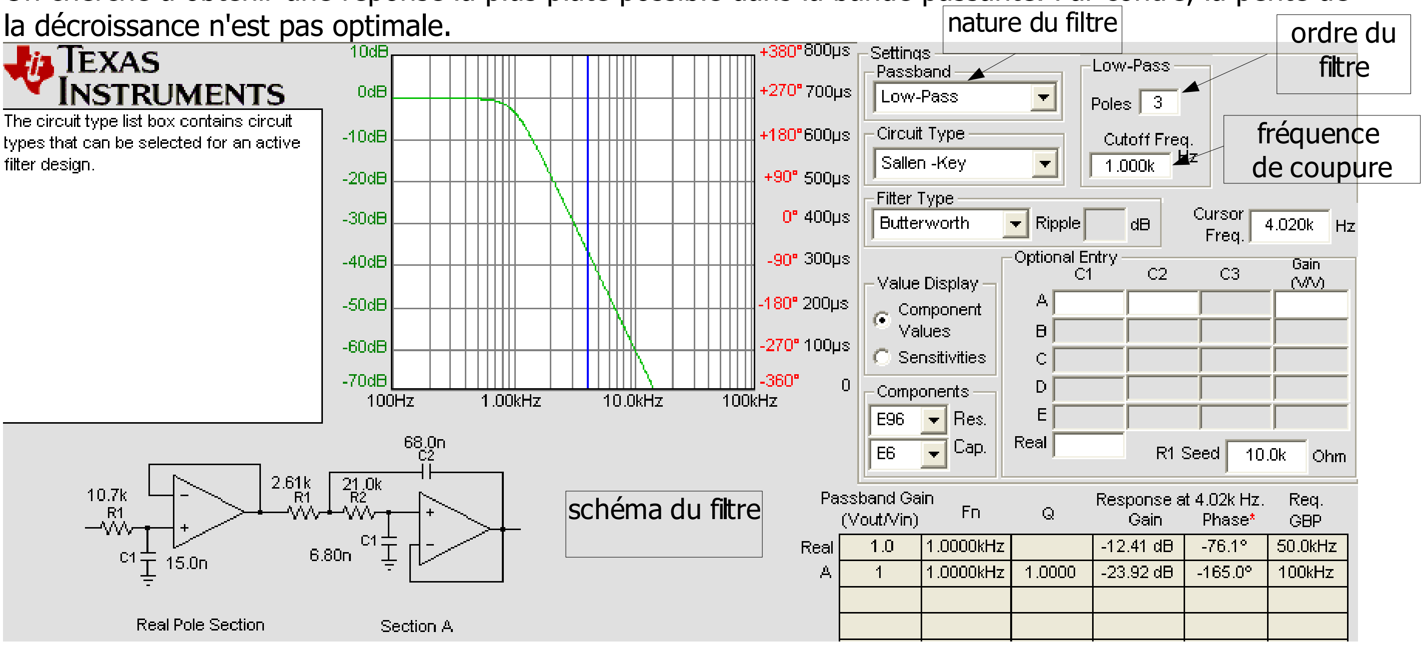
b) <u>Formes de réponse de filtres couramment utilisées :</u>

Dans certains cas, on a besoin de faire entrer la réponse du filtre dans un gabarit précis (reprendre le gabarit réel donné comme exemple partie 1 page 2)

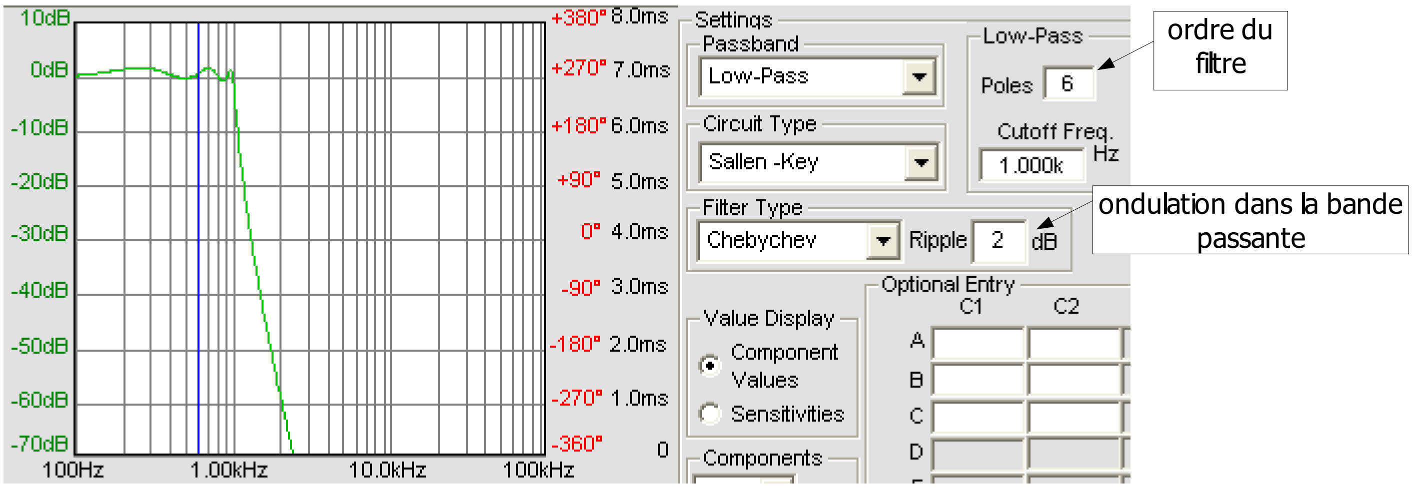
On fait appel alors à des filtres basés sur des polynômes connus en mathématiques et on utilise des logiciels pour calculer les composants du filtre (exemple de logiciel gratuit : Filter Pro de TI http://focus.ti.com/docs/toolsw/folders/print/filterpro.html)

- **réponse de Butterworth :**

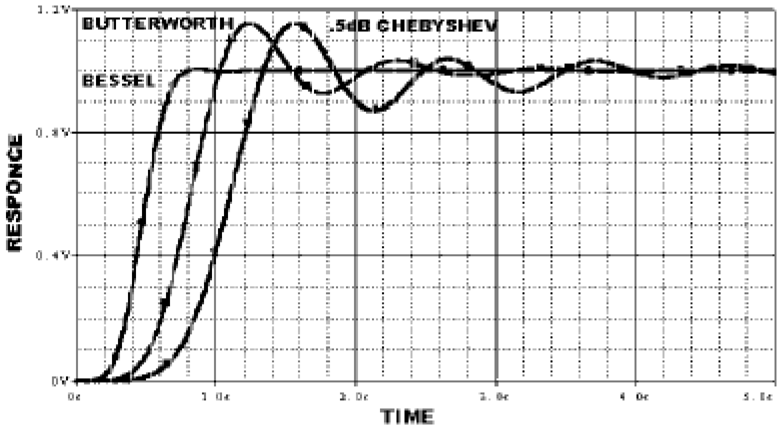
On cherche à obtenir une réponse la plus plate possible dans la bande passante. Par contre, la pente de la décroissance n'est pas optimale.



- **réponse de Chebytshev :** on cherche à obtenir une coupure plus rapide. Par contre, on accepte une ondulation dans la bande passante.

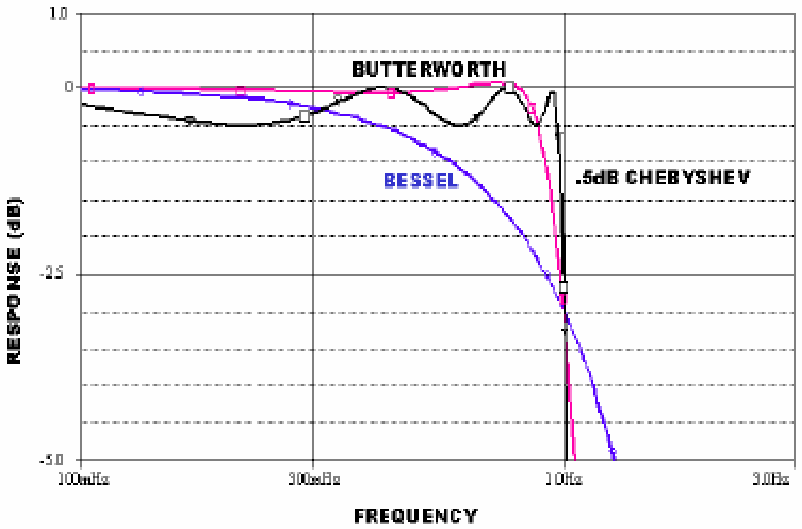


réponse de Bessel : le filtre de Bessel permet d'obtenir une phase qui varie à peu près linéairement avec la fréquence. Cette propriété est très utile lorsqu'on veut transmettre des signaux non-sinusoïdaux (composé de plusieurs fréquences) et que l'on veut récupérer ces composantes en même temps à la réception. Or, le retard de transmission est fonction de la fréquence. Si on n'agit pas sur le signal, les harmoniques arrivent au niveau du récepteur avec un retard différent. On se sert de ce filtre lors de la transmission de signaux carrés :



Il existe d'autres formes de réponses pour des besoins particuliers (forme elliptique qui permet d'obtenir des zéros à des endroits précis, ...)

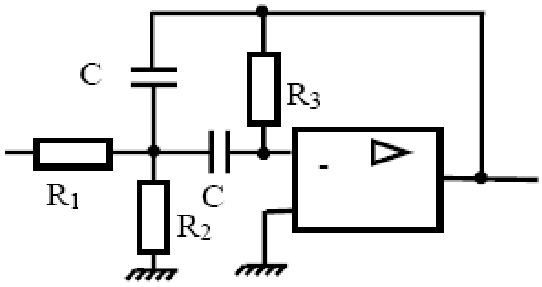
Réponses comparées de trois types de filtres :



Liens intéressants qui m'ont aidé à la présentation de ce chapitre :
http://www.iutenligne.net/ressources/electronique/lebars/analog/filtres.pdf
http://www.louis-armand-mulhouse.eu/btsse/acrobat-modules/filana.pdf
http://sites.estvideo.net/btssepallam/BS1SEcours/C111filtrageanalogique.pdf
http://www.syscope.net/elec/A14.pdf
http://lyceehugobesancon.org/btsselvh/IMG/pdf/Filtres_Actifs.pdf
http://www.librecours.org/documents/8/869.pdf

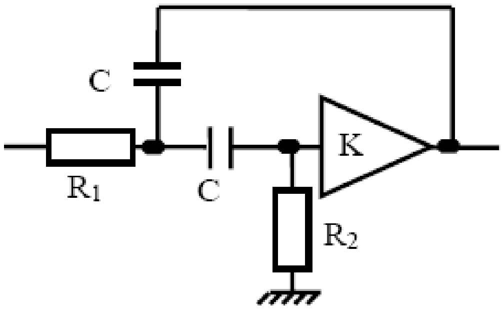
- Pour un passe-bande du second ordre :

Structure de Rauch



$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{C}.\sqrt{\dfrac{1}{R_3}.\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)} \\ \Delta\omega = \dfrac{2}{R_3.C} \\ A_0 = -\dfrac{R_3}{2.R_1} \end{cases}$$

Structure de Sallen et Key



$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{C}.\dfrac{1}{\sqrt{R_1.R_2.(1-K)}} \\ \Delta\omega = \dfrac{1}{C}.\dfrac{1}{1-K}.\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{2}{R_2}\right) \\ A_0 = K.\dfrac{R_2}{R_2+2.R_1} \end{cases}$$

exemple : je veux créer un filtre passe-bande avec une structure de Rauch tel que :

- ➔ C = 10 nF.
- ➔ le filtre est centré sur f0 = 10 kHz avec une bande passante de Δf = 1 kHz
- ➔ l'amplification est de A0 = -10

Calculer les valeurs des composants manquants.

- Passage passe-bas → passe-haut :

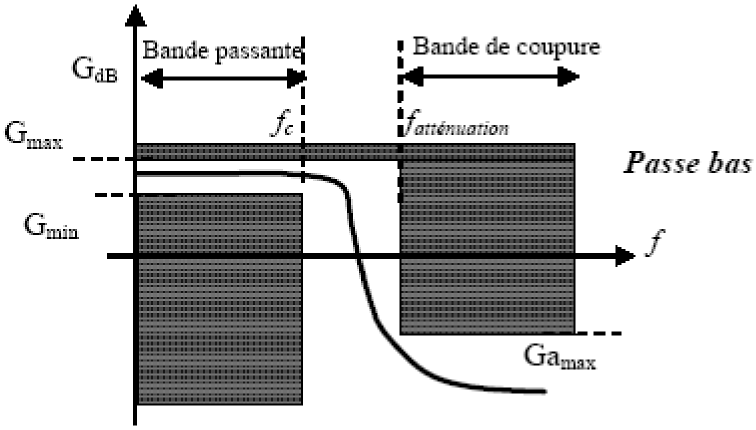
$$\boxed{\dfrac{j.\omega}{\omega_0} \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{j.\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{j.\omega}{\omega_0}}}$$

- Passage passe-bas → passe-bande :

$$\boxed{\dfrac{j.\omega}{\omega_0} \leftrightarrow \dfrac{1}{B}.\left(\dfrac{j.\omega}{\omega_0}+\dfrac{\omega_0}{j.\omega}\right)}$$

où B = 1/Q = Δf/f0

- Ordre du filtre de Butterworth :



$$n > \frac{\log\left(\dfrac{\left(10^{\frac{-Gamax}{10}}-1\right)}{\left(10^{\frac{-Gmin}{10}}-1\right)}\right)}{2.\log\left(\dfrac{fatt}{fc}\right)}$$