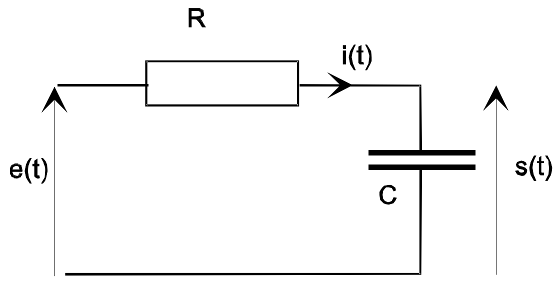
Exercices du chapitre 3 : identification de systèmes

1°) - utilisation des transformées de Laplace

Soit le circuit élémentaire RC ci-contre.



Conditions initiales: pour t < 0, e=0 , s=0 , i=0.

- Etablir l'équation différentielle de s(t).
- Déterminer la transmittance $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$ à partir des impédances de Laplace.
- Refaire le même travail en utilisant l'équation différentielle;
- à l'instant t=0, on applique un échelon de tension: e(t) = E pour t≥0.

Déterminer S(p) et I(p).

- en déduire, en utilisant les théorèmes des valeur initiale et finale, les valeurs suivantes: $i(0+)$, $s(0+)$, $i(\infty)$, $s(\infty)$.

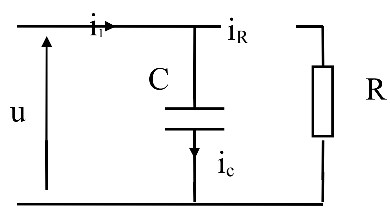
Retrouver ces limites par de simples considérations physiques.

- à partir de S(p) et I(p), déterminer et tracer s(t) et i(t).
- e(t) est à présent sinusoïdale, de fréquence f. Déterminer la fonction de transfert isochrone (en régime harmonique)du circuit et tracer son diagramme de Bode asymptotique.

2°) - identification d'un système du premier ordre (BTS IRIS 2005)

A) ANALOGIE ENTRE UN SYSTEME ELECTRIQUE ET UN SYSTEME HYDRAULIQUE

1) Condensateur en parallèle sur une résistance :



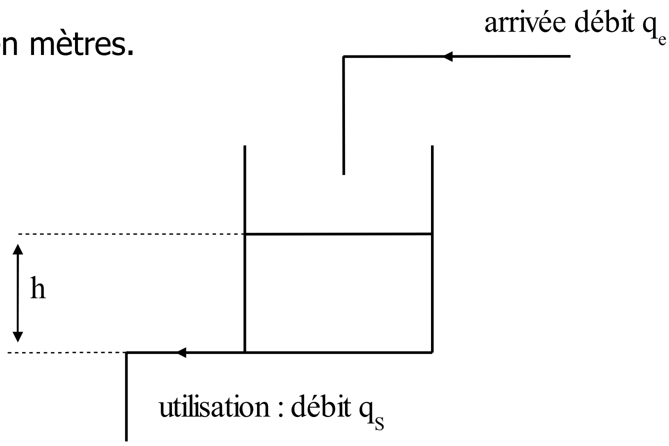
Tous les signaux sont nuls avant l'instant t = 0.
A cet instant i_1 passe de 0 à I_1 et demeure constant ensuite (le générateur produisant ce courant n'est pas représenté sur le schéma ci-dessus).

a. exprimer i_R en fonction de u et R et i_C en fonction de C et de la dérivée du/dt.
b. en déduire l'équation différentielle vérifiée par u (t).
c. montrer alors que : $u(t) = R.I_1 \times (1 - \exp(-\frac{t}{R.C}))$
d. à l'instant t = t_1, $i_C = i_R$. Exprimer u (t_1) en fonction de R et I_1.
e. en déduire t_1 en fonction de R et de C.

2) Le système hydraulique représenté ci dessous comporte un réservoir de section constante (S en m²).

h est la hauteur d'eau dans le réservoir exprimée en mètres.
Il comporte une arrivée d'eau de débit q_e et une sortie d'eau de débit q_S supposée proportionnelle à h.
q_e et q_S sont exprimés en $m^3.s^{-1}$.
Le système est analogue au système électrique précédent et si on remplace i_1 par q_e, i_R par q_S, u par h on trouve une équation différentielle semblable à la précédente :

$$q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S.\frac{dh(t)}{dt}$$



a) Quelle est l'unité de K ?

Le réservoir est vide et les 2 débits nuls jusqu'à l'instant t = 0 où on établit le débit $q_e(t) = Q_0$, qui demeure constant ensuite.

b) déduire de l'étude du circuit électrique précédent, par analogie, l'expression de h(t) pour t >0.

c) exprimer la hauteur atteinte par l'eau dans le réservoir après stabilisation.

d) en exploitant le résultat de la question A-1-c, quel est, en fonction de K et S, le temps t_1 mis pour atteindre la moitié de cette hauteur limite.

3°) - identification d'un système du premier ordre._

<u>Moteur en régime transitoire</u>

La fréquence de rotation n(t) du moteur à courant continu dépend à chaque instant t de la tension u(t) appliquée à l'induit de ce moteur.

Dans ce qui suit, on exprime n en $tr.min^{-1}$, u en V et le temps t en s.
On note respectivement N(p) et U(p) les transformées de Laplace des grandeurs temporelles n(t) et u(t).

Le comportement dynamique du moteur est modélisé par la transmittance isomorphe M(p) telle que : $\boxed{M(p)=\frac{N(p)}{U(p)}=\frac{120}{\pi.(1+0.05.p)}}$

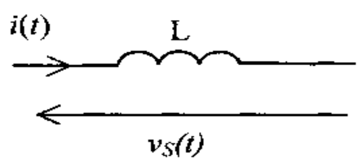
a) Quel est l'ordre du système modélisé par cette transmittance M(p) ? Citer les deux paramètres permettant de caractériser un système de cet ordre et donner leurs valeurs numériques pour le système donné.

b) Déduire de la fonction M(p) l'équation différentielle liant n(t) et u(t).
Préciser la valeur numérique de la constante de temps τ_m du moteur.

4°) - identification d'un système du second ordre.

Le « moteur radial » est une simple bobine dans laquelle on injecte un courant i(t).
Cette bobine, placée dans le champ magnétique d'un aimant permanent fixe, est soumise à des forces de Laplace d'intensité : F=λ.i. Dans cette formule, λ est une constante.
Sous l'effet de ces forces, la bobine se déplace et permet à la tête de lecture de suivre la piste.

a) La bobine est assimilable à une inductance pure de valeur L.



- Quelle est la relation entre les valeurs instantanées vs(t) et i(t) ?
- En déduire la relation entre $V_s(p)$ et I(p), transformées de Laplace de $v_s(t)$ et i(t) dans le cas où : $i(0^+) = 0$.

b) La loi fondamentale de la dynamique permet d'écrire la relation suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+f\frac{dx}{dt}+k\,x(t)=\lambda\,i(t)$$

Dans cette équation, on désigne par x(t) la position du faisceau laser par rapport au centre du disque et par m la masse de l'équipage mobile, f le coefficient de frottement et *k* le coefficient de raideur du ressort de rappel.

Les coefficients m, f, k et λ sont des constantes positives.

On note Vs(p), X(p), I(p) les transformées de Laplace de v_s (t), x(t), i(t).

Montrer que l'expression de la transmittance opérationnelle H(p) définie par $H(p) = \frac{X(p)}{I(p)}$ peut se mettre sous la forme :

$$H(p)=\frac{H_0}{1+a.p+b.p^2}$$

En déduire les expressions des paramètres Ho, a et b en fonction de m, f, k et λ.

c) A l'aide des questions précédentes, déterminer la transmittance du « moteur radial » :

$$H_M(p) = \frac{X(p)}{Vs(p)}$$

5°) - identification d'un système du second ordre.

B-3 Etude d'un système en boucle fermée

Pour évaluer les performances d'un asservissement, on a relevé la réponse indicielle du système en boucle fermée.
Les questions suivantes reposent sur l'exploitation du relevé de la position verticale réelle x(t) de la colonne du robot lorsque la consigne d'entrée Xc(t) est un échelon unité.

B -3-1 Indiquer deux propriétés graphiques qui permettent d'affirmer que le système en boucle fermée n'est pas du premier ordre.
B -3-2 A partir du tracé de la réponse indicielle, le système en boucle fermée peut être identifié à un système typique du second ordre de transmittance :

$$H(p) = \frac{X(p)}{X_C(p)} = \frac{K}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

B-3-2.1. Déterminer la valeur de la transmittance statique K. Justifier la réponse.

B-3-2.2. Mettre en évidence sur la **figure 1** les constructions permettant de déterminer le temps $tr_{5\%}$ de réponse à 5% du système et le dépassement relatif D. Relever la valeur numérique de $tr_{5\%}$. Exprimer la valeur de D en pourcentage de la valeur finale atteinte.

B-3-2.3. La courbe D(m) dessinée à la **figure 2** donne, pour un système du second ordre, le dépassement relatif en fonction du coefficient d'amortissement m. Déterminer la valeur du coefficient d'amortissement m pour l'asservissement étudié.

Figure 1

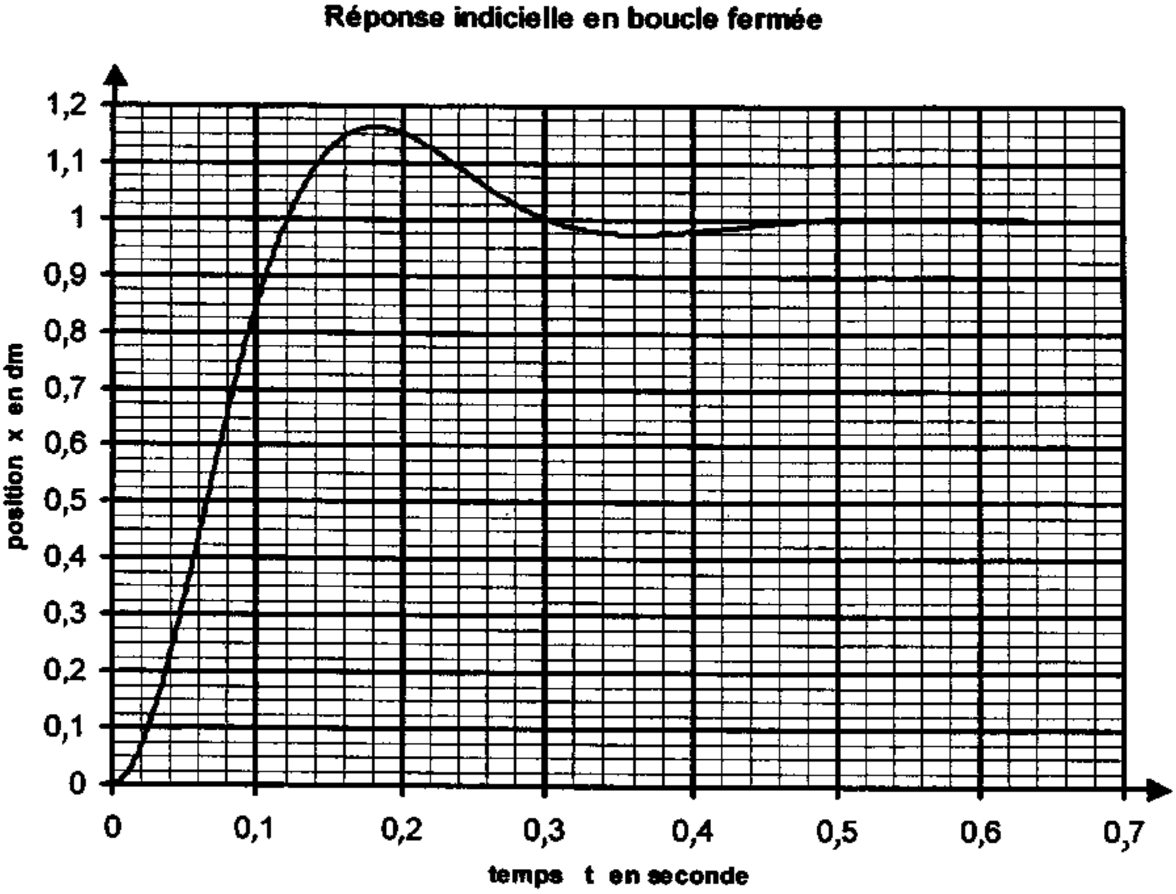
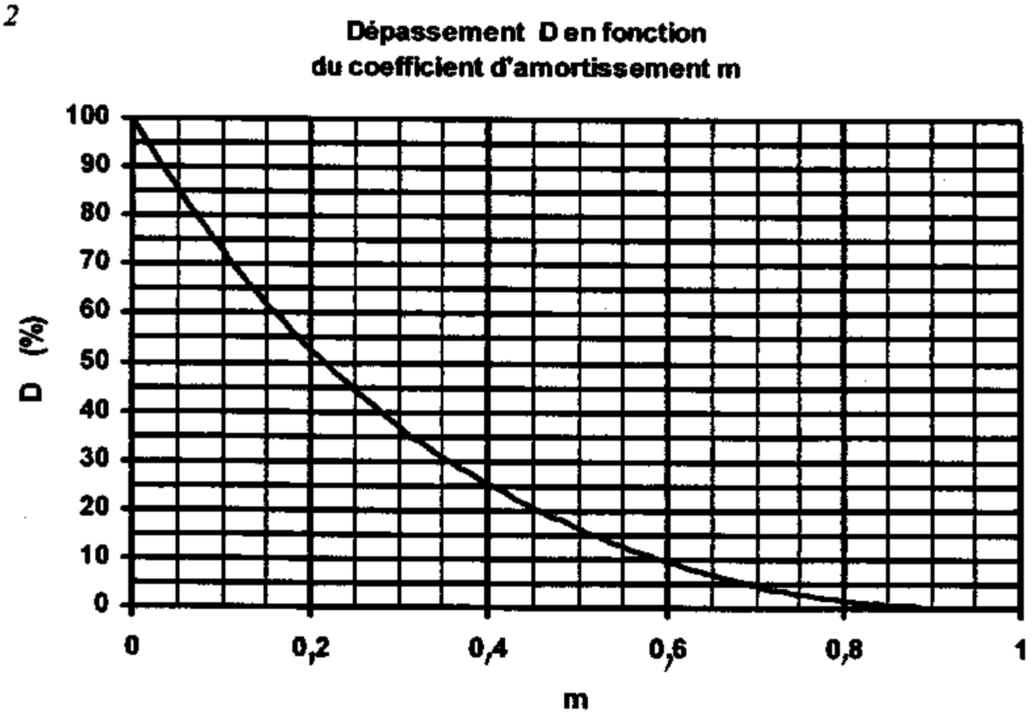


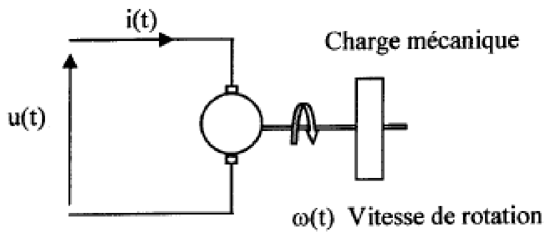
Figure 2



6°) - identification d'un moteur à courant continu (BTS SE 2005).

1.Etude du moteur et de son asservissement

Dans cette partie, on utilisera une modélisation simplifiée du moteur à courant continu. Les caractéristiques du moteur employé, ainsi que les équations du moteur en fonctionnement linéaire, sont rappelées ci-dessous.



Le moteur a les caractéristiques suivantes :

- excitation : aimant permanent ;
- point nominal de fonctionnement : 100 V, 8000 $tr.min^{-1}$;
- moment d'inertie des parties tournantes : $J = 3{,}50\ 10^{-5}\ kg\ m^2$;
- équations du moteur en fonctionnement linéaire :

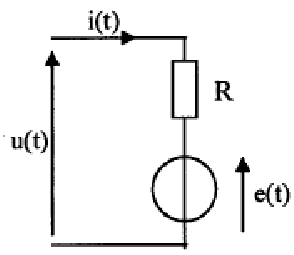
  $e(t) = k.\omega(t)$; e(t) est la force-électromotrice induite ;

  $\omega(t)$ est la vitesse de rotation en $rad.s^{-1}$. On notera N la fréquence de rotation exprimée en $tr.min^{-1}$.

  $c_m(t) = k.i(t)$ avec $k = 0{,}119\ V.rad.s^{-1}$

  $c_m(t)$ est le moment du couple moteur et i(t) l'intensité du courant dans l'induit
- résistance de l'induit : R= 1,30 Ω ; on néglige l'inductance de l'induit.

Dans ces conditions, le schéma électrique de l'induit du moteur est le suivant :



Enfin, on rappelle l'équation fondamentale de la dynamique d'un solide en rotation :

$$J.\frac{d\,\omega(t)}{dt} = c_m(t) - c_r(t)$$

$c_r(t)$ étant le moment du couple résistant produit par la charge mécanique sur l'arbre du moteur.

On donne par ailleurs :

- les transformées de LAPLACE suivantes :

$\Gamma(t)$ (avec $\Gamma(t)=1$ pour $t \geq 0$ et $\Gamma(t)=0$ si $t<0$) $\longleftrightarrow \dfrac{1}{p}$

$$e^{-at} \longleftrightarrow \frac{1}{p+a}$$

$$1 - e^{-\frac{t}{a}} \longleftrightarrow \frac{1}{p\,(1+ap)}$$

- le théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$; F(p) étant la transformée de Laplace de f(t).

1.1 On réalise une étude à vide ($Cr = 0$)

1.1.1 En utilisant le modèle électrique équivalent du moteur à courant continu, établir l'équation électrique relative à l'induit.

1.1.2 A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, établir une expression entre $\omega(t)$ et le courant $i(t)$.

1.1.3 En utilisant les résultats précédents, déterminer l'équation différentielle régissant $\omega(t)$.

1.1.4 Résoudre cette équation différentielle et donner une expression de $\omega(t)$, sachant que $u(t)=0$ pour $t<0$ et $u(t)=U_0=100$ V pour $t\geq 0$.
En déduire la valeur de la constante de temps mécanique τ_m du système et la valeur de la fréquence de rotation N_0 en tours par minute du moteur en régime permanent. Cette valeur est-elle cohérente avec les données du moteur ?

Pour la suite du problème, on posera $\tau_m = \dfrac{R.J}{k^2}$ et on prendra τ_m =3,2 ms.

1.1.5 Donner le temps de réponse à 5%.

1.1.6 Tracer le graphe de N(t) en y représentant la tangente à l'origine

1.1.7 Calcul de la réponse indicielle du moteur alimenté par un échelon de tension.

On note U(p) et $\Omega(p)$ les transformées de Laplace respectives de u(t) et $\omega(t)$.

En utilisant le résultat de la question 1.1.3, montrer que : $\Omega(p) = \dfrac{U(p)}{k(1+\tau.p)}$

puis, à l'aide de la table des transformées de Laplace, retrouver l'expression de $\omega(t)$ du 1.1.5, sachant que u(t) est un échelon de tension d'amplitude $U_o = 100$ V.

1.2 Le couple résistant est désormais non nul

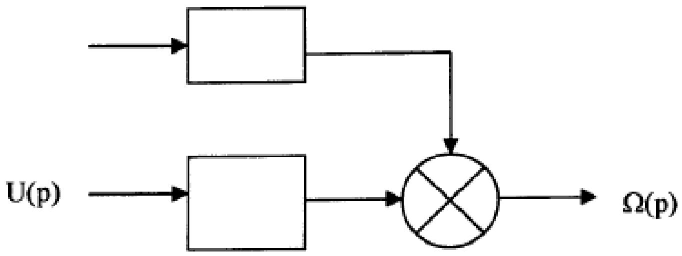
1.2.1 Exprimer, dans ce nouveau cas, la relation fondamentale de la dynamique d'un solide en rotation.

1.2.2 En utilisant la transformée de Laplace et la relation précédente montrer que $\Omega(p)$ se met sous la forme :

$$\Omega(p) = F(p).U(p) + G(p).C_r(p)$$

et exprimer F(p) et G(p) en fonction de τ_m, R et k.

1.2.3 · Montrer que le système peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-dessous qu'on complètera.



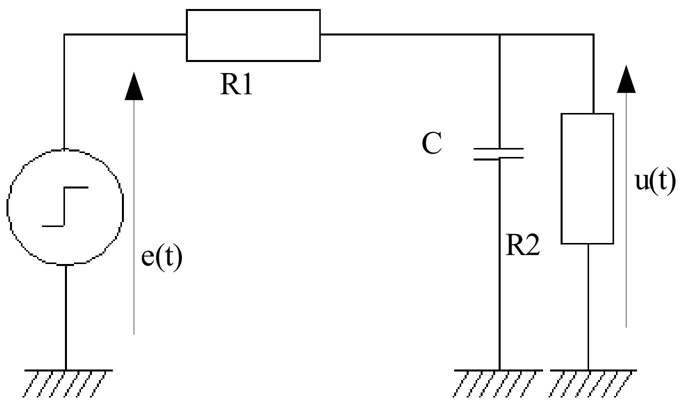
1.2.4 Le moteur tournant à la fréquence de rotation ω_0, on applique un échelon de couple résistant dont l'amplitude du moment a la valeur $C_{r0} = 1{,}2\,N.m$.
Donner l'expression de la nouvelle vitesse de rotation ω_{0r} du moteur en régime permanent, puis la valeur N_{0r} de la fréquence exprimée en tours par minute et enfin l'écart relatif entre les fréquences de rotation à vide et en charge.

7°) - exos de révision.

On considère le montage suivant :

Les valeurs des composants sont :

R1 = 2,2 kΩ , R2 = 1 kΩ et C = 100 nF.



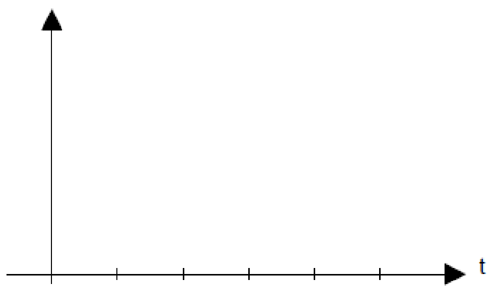
- Donner l'expression de la fonction de transfert de Laplace T(p) = U(p) / E(p) en utilisant les impédances de Laplace.
- Identifier l'ordre du système et donner le nom et les valeurs numériques des paramètres importants.
- Si e(t) est un échelon de valeur 2 V, exprimer E(p), puis S(p) et en déduire s(t).
- En utilisant T(p), déduire l'équation différentielle entre s(t) et e(t). Rappeler la méthode pour résoudre ce type d'équation différentielle et valider la forme de s(t) obtenue précédemment.
- Donner la fonction de transfert complexe si on suppose que e(t) est un signal sinusoïdal.
- Donner l'expression complète de s(t) si e(t) = 2. sin(2.π.f.t) avec f = 2 kHz.
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce système.

Exercice sur le second ordre :

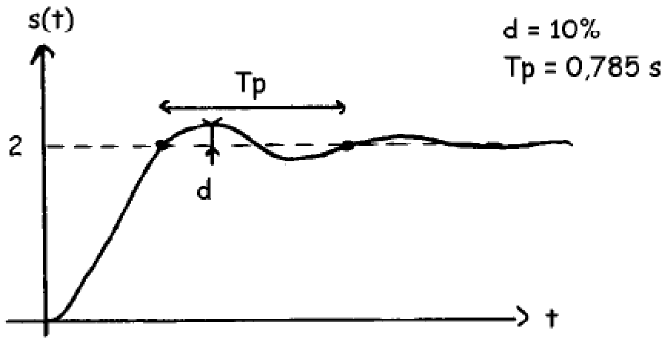
On étudie un système du second ordre dont la transmittance s'écrit : $H(p)=\frac{200}{100+10p+p^2}$

1) Déterminer les valeur de la transmittance en continu H_0, de la pulsation propre et de l'amortissement.

2) Tracer avec le minimum de calculs l'allure de sa réponse indicielle et évaluer son temps de réponse à 5%.



7 Le système dont la réponse indicielle est la suivante correspond-il à la transmittance H(p) ?



$$H(p)=\frac{2}{1+0{,}12p+0{,}01p^2}$$

On rappelle la relation entre pulsation propre et la pseudo pulsation :

$$\omega_0=\frac{\omega_p}{\sqrt{1-m^2}}$$

	Vrai	Faux
a) l'enregistrement montre que le système a une amortissement de m = 0,43	☐	☐
b) l'enregistrement montre que le système a une amplification en continu H_0 = 2	☐	☐
c) la pseudo-pulsation vaut ω_p = 10 rad/s	☐	☐
d) la pulsation propre du système a pour valeur ω_0 = 10 rad/s	☐	☐
e) le système étudié a bien pour transmittance de Laplace la fonction H(p) donnée	☐	☐